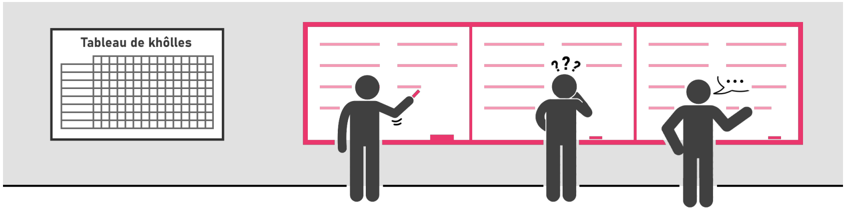

SUJETS DE COLLES 03

1. Questions de cours.

- Donner la définition d'une série convergente.
- Donner la définition d'une série absolument convergente.
- Énoncer et démontrer le critère de comparaison par majoration pour les séries à termes positifs.
- Montrer qu'une fonction est dérivable si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1.
- Expliquer comment marche l'algorithme de la dichotomie pour la recherche d'une solution à l'équation $f(x) = 0$. Écrire ensuite un programme Python qui implémente cet algorithme.
- Qu'est-ce qu'un développement limité à l'ordre 1 pour une fonction ?

2. Exercices classiques.

Exercice 1

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leurs sommes.

1. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{n!}$.
2. $\sum_{k\geqslant 1} k(k-1)\frac{2^k}{5^{k+1}}$.
3. $\sum_{k\geqslant 1} \frac{k-1}{(k-1)!}$.
4. $\sum_{k\geqslant 0} \frac{k^2}{2^k}$.
5. $\sum_{k\geqslant 0} \frac{k^2-k}{k!}$.
6. $\sum_{k\geqslant 0} \frac{k^2}{3^k}$.

Exercice 2

Quelle est la nature des séries ?

1. $\sum \frac{1}{n^2 \ln n}$.
2. $\sum \frac{1}{1+n\sqrt{n}}$.
3. $\sum \frac{n}{2n^3+1}$.
4. $\sum \frac{1}{1+\sqrt{n}}$.
5. $\sum \frac{\ln n}{n^3}$.
6. $\sum \frac{n-\ln n}{n^2+1}$.

Exercice 3

1. Déterminer a et b tels que
$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2}$$
2. Étudier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k(k+2)}$.

Exercice 4

1. Écrire le développement limité à l'ordre 2 en $x = 2$ de la fonction définie par
$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 5.$$
2. Écrire le développement limité à l'ordre 2 de en $x = 1$ de la fonction définie par
$$f(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^2}.$$

3. Écrire le développement limité à l'ordre 2 en $x=1$ de la fonction définie par
$$f(x)=x^2e^x.$$

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=5$ et par la relation $u_{n+1}=f(u_n)$ avec $f(x)=\sqrt{2x+3}$.

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $3\leqslant u_n\leqslant 5$.

2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle est convergente.

3. Calculer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=u_n-u_{n+1}$. Étudier la nature de la série $\sum v_k$.

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par
$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{a}{3^{k+1}},$$
pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

1. Calculer la valeur du réel a.

2. Montrer que X possède une espérance et la calculer.

Exercice 7

Pour $n\geqslant 1$, on pose
$$u_n=\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{3k+1}{3}.$$

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et en déduire que $u_n\geqslant\frac{1}{3n}$.

2. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 8

On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$u_n=\frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}+k\right)}.$$

1. Montrer que $u_{n+1}=u_n\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}+1}$ pour tout n.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente. On note ℓ sa limite.

3. On considère la série de terme général $v_k=u_k-u_{k+1}$. Montrer que cette série converge.

4. On suppose ici que $\ell\neq 0$.

- **a.** Montrer que $u_k-u_{k+1}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\ell}{2k}$.
- **b.** Déduire de ce qui précède que $\ell=0$.

5. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $u_k\geqslant\frac{1}{k+\frac{1}{2}}$. En déduire la nature de la série de terme général u_k.

3. Exercices plus difficiles.

Exercice 9

Soit a un nombre réel strictement positif. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes sont strictement positifs et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose
$$\left\{\begin{array}{lcl} w_n & = & \frac{u_{n+1}}{u_n}-1+\frac{a}{n} \\ \ell_n & = & \ln(n^\alpha u_n)\end{array}\right. .$$
On suppose que la série de terme général w_n est absolument convergente.

1. Soit f la fonction $t\mapsto\ln(1+t)-t$.

a. Préciser le domaine de définition de f et donner un équivalent simple de cette fonction au voisinage de 0.

b. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} f\left(\frac{1}{n}\right)$ est convergente.

2. Démontrer que les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{w_n}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 1} (w_n)^2$ sont convergentes.

3. **a.** Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité

$$\ell_{n+1} - \ell_n = f\left(w_n - \frac{a}{n}\right) + w_n + af\left(\frac{1}{n}\right).$$

b. En déduire la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \ell_{n+1} - \ell_n$.

4. **a.** Justifier la convergence de la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b. En déduire l'existence d'un réel A tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{n^\alpha}$.

5. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}$.

6. Si vous parvenez au bout de cet exo, le colleur vous (ré)-expliquera ce qu'est le critère de d'Alembert pour la convergence des séries et l'intérêt de cet exercice vis-à-vis du cas litigieux du critère de d'Alembert.

Exercice 10

Trouver la limite lorsque $x \to +\infty$ de

$$(2x)^{1+\frac{1}{2x}} - x^{1+\frac{1}{x}} - x.$$

Exercice 11 *Vraiment dur.*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de nombres entiers. Montrer que la série de terme général

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{\operatorname{ppcm}(a_0, a_1, \cdots, a_n)}$$

converge.